

# Kuramoto-Sivashinsky-ligningen

Prosjekt i TMA4210  
ved Sanjay Manikarnika  
og Kristian Stormark

5. mai 2004



# Innhold

1.0 Introduksjon . . . . .	1
2.0 Matematisk analyse . . . . .	1
3.0 Numerisk løsning . . . . .	2
3.1 Løsning ved bruk av ED . . . . .	2
3.2 Løsning ved bruk av ETD . . . . .	3
4.0 Resultater . . . . .	5
4.1 Avvik mellom løsning ved bruk av ED og ETD . . . . .	5
4.2 Løsningssensitivitet . . . . .	6
5.0 Konklusjon . . . . .	7



**Sammendrag** Et kvalitativt studie av Kuramoto-Sivashinsky-ligningen i én romdimensjon. Presentasjon av Exponential Time Differencing og endelig differens som alternative løsningsmetoder med kort sammenligning av resultater fra disse.

## 1.0 Introduksjon

Kuramoto-Sivashinsky-ligningen (fork. KS-ligningen)

$$u_t = -u_{xx} - \nu u_{xxxx} - \frac{1}{2}(u^2)_x \quad (1)$$

hvor  $u = u(x, t)$  og  $\nu \in \mathbb{R}$ , er en av de aller enkleste ligningene som har turbulente løsninger, og den brukes av den grunn ofte som en prototype for systemer med “selvgenererende” kaos. Grovt sagt skyldes denne oppførslen at det ikke-lineære leddet forårsaker spesielle vekselvirkninger mellom de to lineære leddene, noe som tydeliggjøres best ved en spektral analyse av ligningen [1]. Det viser seg da at den lineære delen er ustabil for lave frekvenser og stabil for høye, mens den ikke-lineære delen blander sammen frekvensinnholdet og skaper en ømfintlig likevekt.

Ligningen framkom for første gang i forbindelse med Yoshiki Kuramotos arbeid med diffusjon i reaktorprosesser, hvorpå den da ble publisert i journalen *Progress of theoretical physics* i 1976 [5].

Omtrent samtidig ble ligningen også utledet av Gregory Sivashinsky under hans studie av flammefront-utvikling. Dette arbeidet ble publisert i *Acta Astronautica* i 1977 [7], og  $u(x, t)$  representerte der forstyrrelsen i plane flammefronter som spredte seg i en brennbar oppløsning av oksygen og ulike typer brennstoff.

Kuramoto arbeidet som professor ved Kyoto university, Department of Physics, i Japan, men har nylig gått av med pensjon. Sivashinsky er professor ved Tel-Aviv university, Department of Applied Mathematics, i Israel.

KS-ligningen har siden dukket opp i forskjellige grener av fysikken hvor turbulente fenomener inngår. Noen få eksempler på hva ligningen i så måte kan brukes til å beskrive er:

- overflaten til viskøse væsker som strømmer bølgete nedover et skråplan
- kjemisk kaos i reaksjoner
- hydrodynamisk ustabilitet
- plasma-fysisk oppførsel

## 2.0 Matematisk analyse

Parameteren  $\nu$  i den normaliserte KS-ligningen (1) betegnes ofte som *viskositetskonstanten* og er en karakteristisk størrelse for det dynamiske systemet beskrevet av ligningen. Når løsningen antas å være periodisk med periode  $L$  kan den betraktes som en bølge, og  $\nu$  vil da representere den dimensjonsløse bølgelengden gitt som

$\nu = \frac{\pi^2}{L^2}$ . Det viser seg at når  $\nu \rightarrow 0$ , noe som tilsvarer at bølgen blir uendelig lang, vil løsningen bli økende irregulær og kaotisk [8].

Med periodiske randbetingelser for (1) kan det videre vises at entydig løsning eksisterer [6]. Disse resultatene bygger på forholdsvis tung matematisk teori, og vi henviser derfor til referansen for utdypende forklaring.

### 3.0 Numerisk løsning

Flere ulike numeriske metoder for å løse KS-ligningen er i dag allment tilgjengelige, og hvilke av disse som blir foretrukket brukt i praksis kan variere noe. Antagelser som gjøres om start-/randverdiene til problemet og hvilket området ligningen søkes løst på vil f.eks. være avgjørende for valget av metode. Vår erfaring har likevel vært at i majoriteten av disse benyttes rom-diskretisering ved bruk av Fourier-transform under antagelse om periodisitet i løsningen.

Litt grovt sagt er det som skiller de ulike metodene fra hverandre hvordan de går fram for å approksimerer  $u_t$ . Når så denne først antas kjent brukes en vilkårlig tids-skrittmetode som f.eks. Euler, Runge-Kutta eller Adams-Bashforth til å beregne løsningen.

Ettersom KS-ligningen er et stivt problem vil det i praksis så og si alltid være nødvendig å benytte implisitte metoder for å oppnå ønsket presisjon og stabilitet.

I denne oppgaven har vi valgt å se på to metoder med relativt ulike fremgangsmåter. Den ene er basert på bruk av endelig differens-approksimasjon (fork. ED), en teknikk som vi fant interessant da den inngår i kurset TMA4210 som også dette prosjektet er en del av. Den andre metoden bruker Exponential Time Differencing (eng., fork. ETD) i kombinasjon med diskret Fourier-transform. Som utgangspunkt for sistnevnte har vi sett på en algoritme utviklet av Kassam&Trefethen [4] basert på et 4.ordens Runge-Kutta-skjema først foreslått av Cox&Matthews [2]. I begge tilfeller har vi valgt å anta periodiske randbetingelser. Hovedsaklig brukte vi samme betingelsen som Kassam&Trefethen-metoden benytter for å generere bildet som illustrerer oppgaveteksten, dvs.  $u(x, 0) = u_0(x) = \cos(\frac{x}{16})(1 + \sin(\frac{x}{16}))$  for  $x \in [0, 32\pi]$ .

En annen alternativ metode som kan nevnes er DAF (Distributed Approximating Functional) med bruk av polarkoordinater ved integrasjon på en sirkulær disk og ved antagelse om at løsningen er den trivielle utenfor dette området [9]. Ytterligere flere metoder eksisterer, og en rekke ulike varianter av de overnevnte metodene forekommer også.

#### 3.1 Løsning ved bruk av ED

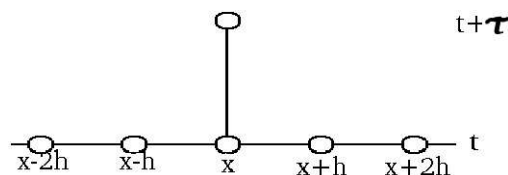
KS-ligningen kan løses ved bruk av endelig differens på flere måter. Vi har her valg å bruke sentraldifferens, slik at derivasjonsoperatoren  $\frac{\partial}{\partial x}$  kan approksimeres med operatoren  $\frac{1}{h}\delta$ , hvor  $\delta u(x, t) = u(x + \frac{h}{2}, t) - u(x - \frac{h}{2}, t)$  på et gitter gitt ved diskretisering av rom-variabelen. Konstanten  $h$  angir forholdet mellom lengden på intervallet og antall gitterpunkter og betegner dermed oppløsningen i diskretiseringen.

Følgende skjema vil således framkomme for hvert gitterpunkt  $x$ :

$$\begin{aligned} u_{xx} &= \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \approx \frac{1}{h^2}(u(x+h,t) - 2u(x,t) + u(x-h,t)) \\ u_{xxxx} &= \frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4} \approx \frac{1}{h^4}(u(x+2h,t) - 4u(x+h,t) + 6u(x,t) - 4u(x-h,t) + u(x-2h,t)) \\ (u^2)_x &= \frac{\partial (u(x,t))^2}{\partial x} \approx \frac{1}{h}(u(x+\frac{h}{2},t)^2 - u(x-\frac{h}{2},t)^2) \approx \frac{1}{2h}(u(x+h,t)^2 - u(x-h,t)^2) \end{aligned}$$

hvor gjennomsnittsoperatoren brukes i siste ligning for å approksimere funksjonsverdiene som faller mellom gitterpunktene.

Skjemaet gir en ordinær differensialligning for hvert gitterpunkt, som igjen kan løses på flere måter, f.eks. eksplisitt ved bruk av forlengts Euler. Som illustrert under med beregningsmolekylet for metoden vil da approksimasjonen av  $u_t$  i punktet  $x$  benytte seg av funksjonsverdien i enkelte punkter rundt dette. Tilsynelatende problemer ved estimering av  $u_t$  for randpunktene unngås ved antagelsen om periodisk løsning.



Figur 1:

Et tidsskritt med lengde  $\tau$  gir ved Eulers metode  $U(x, t + \tau) = U(x, t) + \tau U_t$ .

### 3.1.1 Stabilitet

Det er vanskelig å si noe sikkert om stabiliteten til denne metoden ettersom de fleste analysemetodene forutsetter lineære ligninger. Numerisk fant vi frem til akseptable løsninger så lenge tidsskrittet  $\tau$  i størrelsesorden var mindre enn  $h^4$ , hvor  $h$  gir oppløsningen på rom-diskretisering. Da tidsskrittet ble satt i henhold til dette, var løsning i praksis mulig kun for  $h < 0.4$  av hensyn til beregningstiden.

### 3.2 Løsning ved bruk av ETD

Kuramoto-Sivashinsky-ligningen (1) kan løses meget effektivt ved bruk av ETD. Vi antar at løsningen av (1),  $u = u(x, t)$ , er periodisk med periode  $P$ , slik at Fourierrekken til  $u$  er gitt ved  $u(x, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{i\frac{2\pi}{P}kx} c_k(t)$ . Ved å foreta en diskret Fouriertransformasjon finner vi at (1) kan uttrykkes som

$$U_t = \sum_{k=0}^{N-1} \dot{c}_k(t) e^{iqkx_j} = - \sum_{k=0}^{N-1} c_k(qk)^2 e^{iqkx_j} - \nu \sum_{k=0}^{N-1} c_k(qk)^4 e^{iqkx_j} - \sum_{k=0}^{N-1} [e^{iqkx_j} ik \sum_{m=0}^{N-1} c_m c_{k-m}] \quad (2)$$

hvor  $q = \frac{2\pi}{p}$ ,  $x_j = jh$  og  $h = \frac{p}{N}$ ,  $j = 1, 2, \dots, N$ .

Ettersom  $e^{i\alpha x}$  og  $e^{i\beta x}$  er lineært uavhengige som funksjoner av  $x$  for  $\alpha \neq \beta$  og (2) kan ordnes til

$$\sum_{k=0}^{N-1} [(\dot{c}_k(t) - (qk)^2 + \nu(qk)^4 - iqk \sum_{m=0}^{N-1} c_m c_{k-m}) e^{iqkx_j}] = 0 \quad (3)$$

gir dette per definisjon at for den  $k$ 'te Fourier-koeffisienten vil

$$\dot{c}_k = l_k c_k + r_k \quad (4)$$

hvor  $l_k = (qk)^2 - \nu(qk)^4$  og  $r_k = iqk \sum_{m=0}^{N-1} c_m c_{k-m}$ .

Omskrevet til vektorform har vi altså

$$\dot{\mathbf{c}} = \mathbf{L}\mathbf{c} + \mathbf{r}(\mathbf{c}) \quad (5)$$

hvor  $\dot{\mathbf{c}} = (\dot{c}_1, \dots, \dot{c}_N)^T$ ,  $\mathbf{c} = (\tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_N)^T$ ,  $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_N)^T$ ,  $r_k = iqk \sum_{m=0}^{N-1} c_m c_{k-m}$  og  $L$  er en  $N \times N$  diagonal matrise med  $l_{k,k} = (qk)^2 - \nu(qk)^4$ .

Dette er en 1.ordens ordinær differensialligning som kan løses vha. integrasjon med integrerende faktor.

Ved å multiplisere (5) med  $e^{-Lt}$  og ved så å ordne ligningen får vi

$$(\dot{\mathbf{c}} - \mathbf{L}\mathbf{c})e^{-Lt} = e^{-Lt}\mathbf{r}(\mathbf{c}) \quad (6)$$

Vi definerer så

$$\mathbf{a} = e^{-Lt}\mathbf{c} \quad (7)$$

som ved bruk av kjerneregelen under derivasjon mhp.  $t$  gir

$$\dot{\mathbf{a}} = -\mathbf{L}e^{-Lt}\mathbf{c} + e^{-Lt}\dot{\mathbf{c}} = (\dot{\mathbf{c}} - \mathbf{L}\mathbf{c})e^{-Lt} \quad (8)$$

Ved kombinasjon av (6) og (8) og ved å substituere  $\mathbf{c}$  med  $e^{Lt}\mathbf{a}$  i henhold til (7) over har vi at

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \dot{\mathbf{a}} = e^{-Lt}\mathbf{r}(e^{Lt}\mathbf{a}) \quad (9)$$

som løses ved separasjon over et tidsskritt  $\tau = t_{n+1} - t_n$

$$\int_{\mathbf{a}(t_n)}^{\mathbf{a}(t_{n+1})} d\mathbf{a} = \int_{t_n}^{t_{n+1}} e^{-Lt}\mathbf{r}(e^{Lt}\mathbf{a})dt \quad (10)$$

som ved å substituere tilbake gir

$$\mathbf{a}(t_{n+1}) - \mathbf{a}(t_n) = e^{-Lt_{n+1}}\mathbf{c}(t_{n+1}) - e^{-Lt_n}\mathbf{c}(t_n) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} e^{-Lt}\mathbf{r}(\mathbf{c}(t))dt \quad (11)$$

Multiplikasjon av ligningen med  $e^{Lt_{n+1}}$  gir etter ordning

$$\mathbf{c}(t_{n+1}) = e^{L\tau}\mathbf{c}(t_n) + e^{L\tau} \int_{t_n}^{t_{n+1}} e^{-Lt}\mathbf{r}(\mathbf{c}(t))dt \quad (12)$$

da  $t_{n+1} - t_n = \tau$ . Denne ligningen er en eksakt løsning av den transformerte ligningen (2), og det som skiller de ulike ETD-skjemaene fra hverandre er hvordan de approksimerer integralet i (12).

Kassam&Trefethen brukte i sin algoritme [4] som nevnt over et 4.ordens Runge-Kutta-skjema utviklet av Cox&Matthews [2], og den sammensatte metoden går under betegnelsen ETDRK4. Spesielt benyttet Cox&Matthews seg også av Cauchys integralformel ved evaluering av funksjonsverdier for å unngå numeriske unøyaktigheter nær eventuelle singulariteter.

### 3.2.1 Stabilitet

For en mer inngående analyse av metoden refererer vi til Kassam&Trefethens eget notat [4], samt Cox&Matthews' opprinnelige arbeid [2].

## 4.0 Resultater

Under arbeidet med dette prosjektet implementerte vi en endelig differens-metode i Matlab som vi brukte til å løse (1). Løsning i tid ble da foretatt ved bruk av forlengs Euler. Videre brukte vi også en noe modifisert versjon av Kassam&Trefethens ETDRK4-implementering for sammenligning. Da sistnevnte hevdes [4] å være korrekt til plottingsnøyaktighet i Matlab betraktet vi i stor grad dataene denne produserte som fasit. Vi har i mindre grad fokusert på stabilitet etc. ved metodene, men mest på de kvalitative egenskapene ved disse. Ved bruk av ED-metoden eksperimenterte vi også med å bruke matlab-funksjonen ODE45 i stedet for forlengs Euler ved løsning av det diskretiserte ligningssystemet. Men vi fant at dette kun innebar forsvinnende liten forbedring av løsningen. Grunnen er at feilen i løsningen ved bruk av denne metoden nok hovedsaklig innføres i selve rom-diskretiseringen.

### 4.1 Avvik mellom løsning ved bruk av ED og ETD

For at løsningen av (1) med endelig differens-metoden skulle kunne brukes som tilnærming til den eksakte fant vi at tidsskrittet i løsningen av de ordinære differensialligningene måtte avta svært raskt med økende oppløsning i rom-diskretiseringen. Resultatet av dette var at vi ikke var i stand til å løse ligningen med samme nøyaktighet for ED som med ETD, ettersom kjøretiden på datamaskinen vi arbeidet på ble for stor. Derfor løste vi i stedet ligningen på det samme rom/tid-gitteret og sammenlignet resultatene fra de to metodene der.

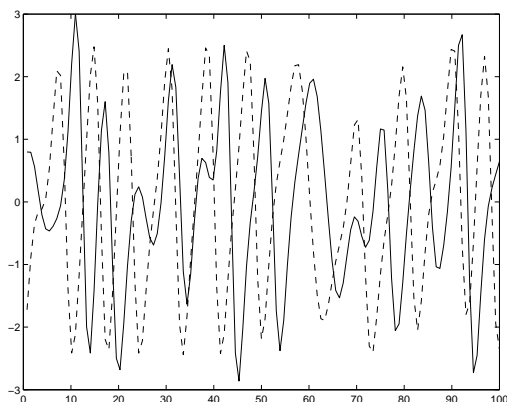
La  $U_{ed}(x, t)$  og  $U_{etd}(x, t)$  betegne den tilnærmede løsningen av (1) ved bruk av henholdsvis ED og ETD. Størrelsen  $E(x, t)$  definert ved  $E(x, t) = |U_{ed}(x, t) - U_{etd}(x, t)|$  vil da være et mål på hvor like de numeriske løsningene er.

Vi beregnet  $E(x, t)$  på gitteret ved å løse (1) simultant med begge algoritmene

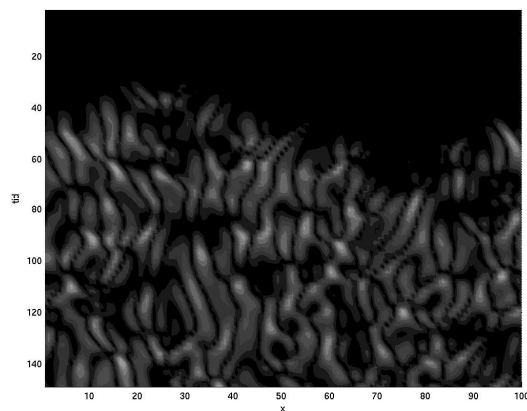
for  $t \in [0, 150]$ . ETD-metoden brukte da 128 punkter for den diskrete Fouriertransformen og ED-metoden brukte tilsvarende en skritt lengde på  $h \approx \frac{32\pi}{128}$  i romdiskretiseringen. Skritt lengden i tid var  $\tau = 0.037252$  for begge metodene, en størrelse som vi numerisk hadde funnet tilfredsstillende.

Blant annet fant vi da at  $\max_{t \in [0, 20]} |E(x, t)| \approx 0.1402$  og  $\max_{t \in [20, 150]} |E(x, t)| \approx 5.4812$ . Dette viser tilsynelatende at forskjellen mellom de to numeriske løsningene vokser seg stor i tid, noe som også virker fornuftig med tanke på global feilforplantning.

Videre fant vi at  $\max_{t \in [0, 150]} |U_{ed}(x, t)| \approx 3.3623$  og  $\max_{t \in [0, 150]} |U_{etd}(x, t)| \approx 3.1403$  som begge er betydelig mindre enn  $\max_{t \in [0, 150]} |E(x, t)|$ . Den største forskjellen mellom  $U_{ed}(x, t)$  og  $U_{etd}(x, t)$  må derfor oppstå når de to løsningene har motsatt fortegn. Med andre ord er den ene av løsningene på vei ned i en bølgedal mens den andre er på vei opp i en bølgetopp. Ved å plote  $U_{ed}(x, t)$  og  $U_{etd}(x, t)$  over hverandre for økende verdier av  $t$  fant vi at de to løsningene tilsynelatende blir forskjøvet i forhold til hverandre, noe som fører til store relative forskjeller som vist i figuren under.



Figur 2: Plot av  $U_{ed}(x, t)$  (heltrukken) og  $U_{etd}(x, t)$  (stiplet) for  $t=92$



Figur 3: Plot av  $E(x, t)$  på gitteret, hvor lyse områder markerer områder med store verdier for denne.

## 4.2 Løsningssensitivitet

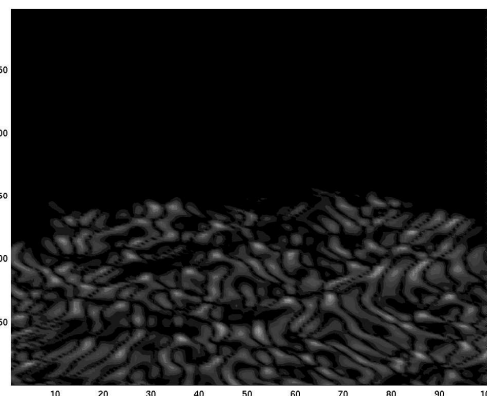
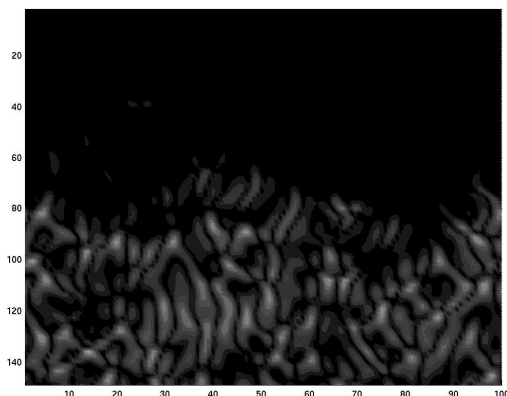
Den numeriske løsningen av KS-ligningen (1) er i svært stor grad sensitiv for små perturbasjoner i initialverdiene [3].

Ved å se på to løsninger,  $U_1(x, t)$  og  $U_2(x, t)$ , fra samme metode med en liten forskjell  $\Delta$  i initialverdiene fant vi at disse hurtig atskilte seg fra hverandre.

La  $U_1(x, t)$  være den numeriske løsningen av (1) med  $u(x, 0) = u_0(x)$  og  $U_2(x, t)$  løsningen av samme ligning med  $u(x, 0) = u_0(x + \Delta)$ . Da gir  $E_\Delta(x, t) = |U_1(x, t) - U_2(x, t)|$  et mål for forskjellen mellom de numeriske løsningene.

Vi fant begge metodene til å gi avvikende løsninger ved små perturbasjoner, som vist

i figurene under.



Figur 4: Plot av  $E_{\Delta}(x, t)$  for  $\Delta = 1 \cdot 10^{-1}$ .    Figur 5: Plot av  $E_{\Delta}(x, t)$  for  $\Delta = 1 \cdot 10^{-5}$ .

## 5.0 Konklusjon

Kuramoto-Sivashinsky-ligningen har vært gjenstand for omfattende studier de siste 20 årene, og da både med henblikk på numerisk løsning og matematisk analyse. Hovedårsaken til dette er at ligningens dynamiske egenskaper har vist seg å ha betydelige anvendelser innen for store fagfelt som forbrenningsteori, kjemi og fluid-mekanikk m.m. Forholdsvis komplekse og kaotiske fenomener har latt seg beskrive ved bruk av ligningen, og resultater som er oppnådd ved undersøkelse av denne har i enkelte tilfeller også latt seg overføre til mer kompliserte ligninger og dermed forenklet løsningen av disse.

Av de to numeriske metodene vi her har omtalt er det liten tvil om at ETD med bruk av Cox&Mattheus' 4.ordens Runge-Kutta skjema klart var den beste for vårt formål. Å oppnå nøyaktige numeriske løsninger med ED, som er en eksplisitt 1.ordens metode, fant vi som forventet for KS-ligningen å forutsette svært høy oppløsning på rom-diskretiseringen. Som allerede påpekt resulterte dette igjen i at den tillatte størrelse for tidskrittet ble så liten at løsning i praksis ble umulig for tidsintervaller over en viss størrelse.

Den matematiske teorien rundt KS-ligningen er relativt tung og omfattende. Og utvilsomt må et betydelig arbeid legges ned for at gjennomgående forståelse av denne skal kunne oppnås. Likevel har den vist seg som et problem som egner seg godt for å teste numeriske løsningsmetoder, da den kombinerer høye ordens lineære ledd med lave orden ikke-lineære ledd, noe som vanskeliggjør numerisk stabilitet.

Vi har i denne oppgaven forsøkt å gi en lettfattat presentasjon av Kuramoto-Sivashinsky-ligningen og noen av de egenskapene som karakteriserer denne. De mer dyperegående numeriske og analytiske aspektene har vi bare overflatisk berørt, men mye god litteratur finnes på området.

# Bibliografi

- [1] P. Collet, J. P. Echmann, H. Epstein og J. Stubbe, Analyticity for the Kuramoto-Sivashinsky equation, *Physica D* **67**, 321-326 (1993)
- [2] S. M. Cox og P. C. Matthews, Exponential time differencing for stiff systems, *Journal of Computational Physics* **176**, 430-455 (2002)
- [3] J. M. Hyman og B. Nicolaenko, The Kuramoto-Sivashinsky equation: a bridge between PDE's and dynamical systems, *Physica D* **18**, 113-126 (1986)
- [4] A. K. Kassam og L. N. Trefethen, Fourth-order time stepping for stiff PDEs, *SIAM Journal on Scientific Computing*, venter på publisering. Se <http://www.comlab.ox.ac.uk/oucl/work/nick.trefethen/etd.ps.gz>
- [5] Y. Kuramoto og T. Tsuzuki, Persistent propagation of concentration waves in dissipative media far from thermal equilibrium, *Progress of theoretical physics* **55**, 356-369 (1984)
- [6] B. Nicolaenko og B. Scheurer, Remarks on the Kuramoto-Sivashinsky equation, *Physica D* **12**, 391-395 (1984)
- [7] G. I. Sivashinsky, Nonlinear analysis of hydrodynamic instability in laminar flames - I. Derivation of basic equations, *Acta Astronautica* **4**, 1117-1206 (1977)
- [8] Y. S. Smyrlis og D. T. Papageorgiou, Computational study of chaotic and ordered solutions of the Kuramoto-Sivashinsky. Se <http://techreports.larc.nasa.gov/icase/1996/icase-1996-12.pdf>
- [9] D. S. Zhang, G. W. Wei, D. J. Kouri, D. K. Hoffman, M. Gorman, A. Palacios og G. H. Gunaratne, Integrating the Kuramoto-Sivashinsky equation in polar coordinates: Application of the distributed approximating functional approach, *Physical Review E* **60**, 3353-3360 (1999)